物性物理とトポロジー
——磁荷の量子化と量子ポンプ

押川正毅 おしかわ まさき
東京大学物性研究所
URL: http://oshikawa.issp.u-tokyo.ac.jp/index-j.html

もし単独で磁荷をもつ磁気単極子(モノポール)が存在するとすれば，その磁荷は量子力学のトポロジーにより量子化される。モノポールは現在まで発見されておらず幻の粒子のままであるが，量子ホール効果や量子ポンプなど，物性物理で実験的に観測できる量が仮想的なモノポールの磁荷に対応して量子化されることがある。

1 トポロジカル量子数と波動関数の位相

トポロジーは，「連続変形によって変わらない性質」を調べる数学の一分野である。図形の長さや角度などは連続変形によって変わってしまうので，「連続変形によって変わらない性質」は，平たく言えば「図形のつながり具合」ということになる。トポロジーを特徴づけるものとして，連続変形によって不変な「トポロジカル不変量」を見つけられると便利である。たとえば，床と天井をつなぐ柱に輪ゴムがかかっているとする。このとき，輪ゴムの形や長さは変形によって変わってしまう。しかし，輪ゴムが柱の周りを何周しているか，という「巻き付き数」を考えると，これは整数であり，さらに輪ゴム(もしくは柱)を切らない限り変化させることはできない。つまり，この「巻き付き数」はトポロジカル不変量の一例である。長年の研究により，物理のいろいろな問題に「トポロジカル量子数」が顔を出すことがわかってきた。物質の性質を探求する物性物理学においても，トポロジーやトポロジカル量子数は必要不可欠な概念になっている。

ミクロな世界を支配している量子力学は，物性物理学の基礎としても重要である。量子力学では，たとえば1つの電子の状態は「波動関数」$\phi(\vec{r})$で与えられる。波動関数は一般に複素数なので，「位相」の自由度をもつ。これは数学的には複素数としての位相だが，イメージとしては，波動関数は時計の針のように時間的に回転しており，その針の進み具合(角度)と思ってもよいだろう。電子をある点(の近く)で観測する確率は，波動関数の絶対値(時計の針の長さ)の2乗によって与えられるので，波動関数の位相を一斉に進めても(時計の針を一斉に同じ角度だけ回転しても)確率密度は変わらない。

数学的には，この操作は波動関数に定数の位相因子$e^{i\theta}$を掛ける変換

$$\phi(\vec{r}) \longrightarrow e^{i\theta}\phi(\vec{r}) \tag{1}$$

となる。この変換は，電子の観測確率だけでなく，あらゆる物理量の観測に影響を与えないことも示すことができる。すなわち，量子力学は波動関数の位相に関する対称性をもつ，ということになる。(一般に，物理系の対称性とは，何らかの変換に対して系が不変であることを意味する。)時計の針が1周すると元に戻るように，位相が2π(360度)進むとゼロと等価になる。仮に位相が元に戻るとすれば，何周して元に戻るか，という「巻き付き数」に相当するトポロジカル不変量を考えることができる。以下で見ていくように実際にはもう少し複雑になるが，量子力学では波動関数の位相に関するトポロジーが非常に重要であり，これが実験的に観測可能な物理量の量子化という著しい現象を導く。

2 ゲージ場としての電磁場

電磁気力は基本的な力の1つであり，電場と

磁場によって表される。同符号の電荷どうしは反発し，異符号の電荷どうしが引き合う「クーロン力」は電場によって媒介される。身の回りの物質はほぼ電気的に中性であるが，たとえば高温や光の照射によって電子を叩き出すことができ，この電子が負の電荷をもっていることはさまざまな実験で確立されている。磁場によって媒介される磁力も，数学的には「磁荷」の間にクーロン力と類似した静磁力がはたらくものとして記述できる。しかし，電場と磁場の間には大きな違いがあり，電荷は（電子のもつ負電荷のように）単独で存在し得るが，磁荷を単独で取り出すことはできない。たとえば，身近にある「磁石」はN極とS極をもち，仮想的には正の磁荷をもつN極と負の磁荷をもつS極からなるとみなすことができる。しかし，磁石を半分に切ってもやはり両極をもつ磁石が2つできるだけであり，磁荷を単独で取り出すことはできない。

さて，物理法則は局所的であり，遠くの事象が直接影響を及ぼすことはないと考えられている。そこで，量子力学の位相に関する対称性についても，対称性を局所的なものに拡張することは自然である。すなわち，前述のように波動関数の位相を一斉に進める（時計の針を同じ角度で回転する）かわりに，位置に依存した位相因子 $\theta(\vec{r})$ による変換（時計の針を場所によって違う角度で回転すること）

$$\phi(\vec{r}) \longrightarrow e^{i\theta(\vec{r})}\phi(\vec{r}) \qquad (2)$$

を考える。これをゲージ変換と呼ぶ。しかし，波動関数の相対的な位相には物理的な意味があった。特に，運動量や電流といった物理量は波動関数の微分に依存するので，ゲージ変換によってこれらの物理量が変化してしまう。つまり系はゲージ変換に対しての不変性をもち得ない，ように思える。しかし，以下のように考えることによって，局所的な変換に対する「ゲージ対称性」を考えることができる。

波動関数の微分とは，位置の変化による波動関数の変化率である。ゲージ変換によって位相を局所的に変えてしまうと，位相の「基準」が場所によって異なってしまうことになる。これは，地球上の各地で異なる標準時間を採用しており，時計の基準が違えば時計の読みを直接比較できないことと似た状況である。異なる場所の波動関数の位相を比較するには，位相の基準の変化を差し引いて行う必要がある。そのために「ゲージ場」$\vec{A}(\vec{r})$ を導入し，$\vec{r}$ とその近くの $\vec{r}+\delta\vec{r}$ の間では，位相の基準が $\frac{2\pi e}{h}\vec{A}(\vec{r})\cdot\delta\vec{r}$ だけ異なるとしよう。ただし，e は電気素量（電子の電荷），h はプランク定数であり，これらの定数は後の便宜のために導入した。すると，基準の変化を考慮した微分（共変微分）は $\vec{\nabla}-i\frac{2\pi e}{h}\vec{A}(\vec{r})$ となる。ゲージ変換(2)は位置に依存する位相の基準の変更なので，ゲージ場の変換

$$\vec{A}(\vec{r}) \longrightarrow \vec{A}(\vec{r})-\frac{h}{2\pi e}\vec{\nabla}\theta(\vec{r}) \qquad (3)$$

を伴う。このようにゲージ場も同時に変換することにすれば，共変微分はゲージ変換(2)によって不変であることが確かめられる。電流などの物理的に観測可能な量は，波動関数の単なる微分ではなく共変微分に依存するとすれば，量子力学系はゲージ変換のもとでの不変性をもつことになる。

このように対称性を局所的なゲージ対称性に拡張することができたが，それに伴って必然的にゲージ場 $\vec{A}$ が導入された。実は，このゲージ場は電磁気学でベクトルポテンシャルと呼ばれるものであり，電場や磁場はこのゲージ場の微分によって表すことができる。たとえば，磁場は $\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$ で与えられる。ベクトルポテンシャルの値はゲージ変換によって変わってしまうため一意に決まらないが，磁場はゲージ変換のもとで不変である。

ゲージ場は，異なる位置の間で位相を比較するときの「平行移動」の規則を定めるが，微小なループに沿って1周して元の点に戻ってきたときに，位相が変化する可能性がある。この変化を与える「曲率」が磁場に他ならない。ゲージ場（ベクトルポテンシャル）と磁場の関係と相違は，図1のようなリング状の系において鮮明になる。このとき，電子はリング状の金属中のみを移動できるとし，

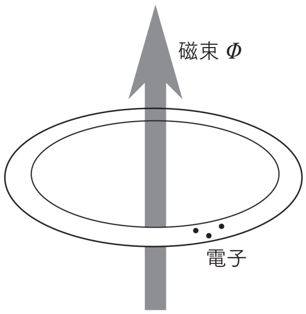

図 1—アハラノフ・ボーム効果（AB 効果）の模式図
電子は金属でできたリング中を運動し，リングの中空部分のみに磁束 Φ が通っている。古典的には電子は直接磁場と接することがないので何の影響も受けないはずだが，量子力学的には電子がリングを 1 周すると位相 $2\pi\Phi e/h$ を獲得するため電子状態に影響を与える。

磁場はリングの中空部分のみに存在するとしよう。古典的には，電子と磁場が直接接触することはないので，磁場は電子の運動に全く影響を与えない。しかし，量子力学では，以下のように中空部分の磁場によって電子状態が影響を受けてしまう。磁場とベクトルポテンシャルの関係を積分すると，

$$\oint_C \vec{A}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = \int_S \vec{B}(\vec{r})\cdot d\vec{n} = \Phi \qquad (4)$$

を得る（ストークスの定理）[1]。ここで，$\oint_C$ はリングを 1 周する経路に沿っての積分，$\int_S$ は経路 C が囲む曲面 S 上での積分，Φ は S を貫く磁束である。この関係から，電子がリングを 1 周して元の位置に戻ってくると，位相 $2\pi\Phi e/h$ を獲得することがわかる。これは電子状態に影響を与える。このように，電子と直接接触していない磁場がベクトルポテンシャルを通じて電子状態に影響を与える現象をアハラノフ・ボーム効果（AB 効果）[2,3]と呼ぶ。（解説として，たとえば文献 4 を参照）。AB 効果は量子力学から自然に導かれるが，驚くべき現象であるため懐疑論も根強かった。しかし，超伝導体を利用した外村らの巧妙な実験により，疑問の余地なく立証された[5]。

歴史的には，ゲージ対称性の発見以前に，計算の簡略化のためにベクトルポテンシャルが導入されていた。しかし，現代的には，ベクトルポテンシャルは単なる計算上の方便ではなく，ゲージ対称性の要請から必然的に存在するゲージ場であり，電場や磁場よりも基本的な量であると言える。（ゲージ理論の発展の経緯については文献 6 を参照。）

3 磁束量子とモノポール

電磁場をゲージ場として理解することにより，電荷と違って磁荷を単独で取り出すことが不可能である理由を解明することができる（ように見える）。閉じた曲面（たとえば球面）を貫く磁束は，磁場をベクトルポテンシャルによって表すと，$\int \vec{\nabla}\times\vec{A}\cdot d\vec{n}$ となり，この曲面には境界がないため，ストークスの定理を使うとゼロになる[1]。一方で，もし単独で磁荷をもつ「磁気単極子（モノポール）」が存在すれば，そこから出る磁束の総計はゼロではないはずである。したがって，上記のストークスの定理からモノポールの非存在が証明された！（ように思える）。

しかし，ディラックは，さらに考察を進めると，実はモノポールが存在し得ることを示した[7]。さらに驚くべきことに，モノポールの取り得る磁荷は量子化されるのである。ディラックの議論を理解するために，まず AB 効果に立ち戻って考えよう。AB 効果は，電子が中空部のあるリングを 1 周して戻ってきたときに獲得する量子力学的な位相によって生じる。位相が 2π ずれると元に戻るので，電子の位相差 2π に相当する磁束 h/e が中空部を貫いているときは AB 効果は観測できない。このときの磁束 h/e を磁束量子と呼ぶ。AB 効果が消失する磁束量子の値は基本的な物理定数だけで決まっており，リングの形状などの詳細によらない。

ディラックは，図 2 のように，磁束量子を無限に小さい断面に集束させた「ひも」を考えた。「ひも」の外側では AB 効果は生じないので，この磁束量子の存在は検知できない。ひもの端点からは，磁束の保存により，（ひもを除いて）h/e だけの磁束が出ていることになる。ディラックの「ひも」が検知できないとすれば，形式的には磁束の総計がゼロでストークスの定理と矛盾しないが，実質的にはひもの端点がモノポールとしてふるまうことになる！　このように，ディラックの議論

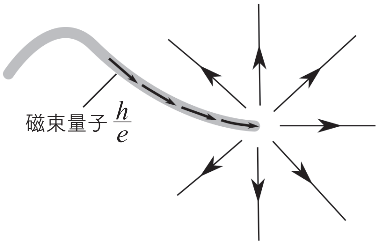

図 2―ディラックによるモノポールの概念図
無限に細い「ひも」の中に磁束量子 h/e が閉じ込められており，このひもの端から磁束が広がっている。「ひも」中の磁束を含めると純粋な磁荷は存在しない（各点で磁束が保存する）が，「ひも」に閉じ込められた磁束は外部からは検知できないため，広がっている磁束しか検知できず，「ひも」の端点が実質的にモノポール（磁気単極子）と見なすことができる。

によって，量子力学の枠組みの中でモノポールが存在できるが，その磁荷は磁束量子（の整数倍）に量子化されることが示された。これは，「トポロジカル量子化」の典型的な例にもなっている。モノポールの磁荷の量子化に伴い，閉曲面を貫く磁束は h/e の整数倍となるが，この整数は数学的には閉曲面上のゲージ場の「チャーン数」と呼ばれる[8]。

4 サウレス・ポンプと量子ホール効果

ディラックの議論によりモノポールの存在が可能とされ，実験で検出する努力が続けられている。残念ながら，現在のところ我々の住む宇宙においてモノポールの存在は確認されていない。しかし，ディラックの見出したモノポール磁荷の「トポロジカル量子化」と同様の構造が物性物理学における多くの現象で見いだされ，現代の物理学の1つの中心になっている。

物性物理におけるトポロジカル量子化が最初に認識された著しい現象は量子ホール効果である[9]。通常，電圧を掛けるとそれと同じ方向に電流が流れるが，磁場下では電圧と垂直な方向に電流が流れる場合がある。この比例係数がホール伝導度である。一定の条件下で，ホール伝導度は e^2/h の整数倍に極めて高い精度で量子化されることが実験的に見いだされている。このような現象の背後には「トポロジカル量子化」があると理解するのが現代的な視点からは自然である。ホール伝導度のトポロジカルな量子化は，まず，ラフリンの思考実験[10]により示された。さらに，サウレス・甲元・ナイチンゲール・デナイス（TKNN）は，一定の条件下で，ホール伝導度は，トポロジカル不変量であるチャーン数（整数）の e^2/h 倍で与えられることを示した[11,12]。サウレスは，さらにこの議論を一般化して，系をゆっくり変化させて元に戻すとき，系が輸送する電荷は一定の条件下で電荷の整数倍に量子化されること，この整数もチャーン数で与えられることを示した[13]。系を変化させて元に戻すとき，物質を輸送することは古典的にもしばしば見られる。自転車の空気入れなどの「ポンプ」はその典型的な例である。そこで，サウレスが示したような，量子化された輸送現象を「サウレス・ポンプ」と呼ぶ。ラフリンやサウレスの議論に従えば，量子ホール効果も一種のサウレス・ポンプとみなすことができる。

サウレス・ポンプにおける輸送のトポロジカル量子化を，一般的な議論[14,15]に沿って紹介しよう。先述のように，トポロジカル量子化された輸送電荷はチャーン数であり，一種のモノポールの磁荷として解釈できる。ただし，このときの「モノポール」は仮想的なものであり，現実に磁荷をもったモノポールを取り出せたわけではない。簡単のため1次元系を考える。系を実際に「ポンプ」として利用するには，左右を粒子浴につなげて，たとえば左側から右側へ電荷を輸送させることになる。しかし，そのように外部につなげた系を取り扱うのは理論的には難しくなるので，仮想的にこの系の左右をつなげてリング状にしたものを考える。すると，図1のように，このリングの中に磁束（AB 磁束）Φ を導入することができる。この磁束 Φ が磁束量子 h/e に達すると，先述のようにリング上の電子には磁束が検知できず AB 効果が消失するため，系は元に戻るとみなせる。（正確には，「大きなゲージ変換」が必要である[10,15]。）一方，サウレス・ポンプでは，AB 磁束の挿入とは別に，系をゆっくり変化させる。この変化を，パラメータ τ（$0 \leq \tau \leq 1$）で表そう。したがって，系は2つのパラ

メータ(τ,Φ)をもち，2次元の仮想的な空間上で考えることができる。$\Phi=h/e$または$\tau=1$で系は元に戻るので，この2次元空間は閉じている（境界をもたない）。

さて，絶対零度にある系をゆっくり変化させると，系は常に基底状態にあると考えられる（断熱変化）。したがって，系の状態は基底状態の状態ベクトル（多体波動関数）$|\Psi(\tau,\Phi)\rangle$によって与えられる。2次元パラメータ空間上で，パラメータの変化に伴う基底状態の位相変化率は，仮想的なゲージ場$\mathcal{A}_\alpha=-i\dfrac{h}{2\pi e}\langle\Psi(\tau,\Phi)|\dfrac{\partial}{\partial\alpha}|\Psi(\tau,\Phi)\rangle\,(\alpha=\tau,\Phi)$で表せる。各パラメータについて基底状態の位相の選び方は任意なので，$|\Psi(\tau,\Phi)\rangle\to e^{i\theta(\tau,\Phi)}|\Psi(\tau,\Phi)\rangle$と変更しても良いが，これはまさに2次元パラメータ空間上でのゲージ変換に相当する。このゲージ変換に対して$\mathcal{A}_{\tau,\Phi}$は(3)と類似の変換を受け，2次元パラメータ空間上の仮想的な「ゲージ場」とみなすことができる。

磁束を増加させると，誘導電場が生じる。電場は電流と結合するため，この誘導電場によって電流を検出することができる。特に，系が基底状態にあるときは，パラメータτの微小変化$\delta\tau$によって誘起される輸送電荷はτおよびAB磁束Φに対する基底状態の位相変化によって

$$\delta\tau\frac{2\pi e^2}{h}\vec{\nabla}\times\vec{\mathcal{A}} \tag{5}$$

と書ける。$\vec{\nabla}\times\vec{\mathcal{A}}$は，2次元パラメータ空間上の仮想的な磁場と解釈できる！　そこで，パラメータを0から1に変化させて系を元に戻したときの全輸送電荷の，AB磁束Φに関する平均値を取ると，$Q=\dfrac{2\pi e^2}{h}\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int d\tau d\Phi\vec{\nabla}\times\vec{\mathcal{A}}$となる。これは，2次元パラメータ空間を貫く全磁束（のe^2/h倍）であり，モノポールの磁荷の量子化に対応してeの整数倍に量子化される。このように，サウレス・ポンプにおける輸送電荷はトポロジカル量子化を示すが，その機構はディラックが見出したモノポールの磁荷の量子化に対応しており，仮想的な全磁束がトポロジカル量子数であるチャーン数（整数）によって量子化されることによる。電荷を輸送するサウレス・ポンプでは，系の変化と磁束の挿入によって量子力学的な状態に「ねじれ」が生じ，2次元パラメータ空間(τ,Φ)上で量子状態の位相を一意に決められなくなるものと解釈できる。この「ねじれ」の度合いを示すのがトポロジカル量子数であるチャーン数であり，それこそが1周期でサウレス・ポンプが輸送する，量子化された電荷を与えるわけである。

5 最近の発展

物性物理にトポロジーが本格的に導入されたのは，トポロジカル欠陥により誘起されるベレジンスキー・コステルリッツ・サウレス転移（1970年代）と量子ホール効果（1980年代）の発見が契機だったと考えられる。これらの発見はいずれも40年以上前のことであったが，それらを源流とした研究が発展し，現在ではトポロジーは物性物理の中心的な概念になっている。トポロジーにまつわる物性物理の最近の話題は多岐にわたり，限られた紙面ではとても紹介しきれないが，重要な課題の1つは「トポロジカル量子相」の分類と研究である。全体として巨視的な磁化をもつ強磁性体と常磁性体のように，物質の状態を分類したものが「相」である。当初認識されていた相に関しては，磁化などの局所的に観測可能な物理量によって分類が行われていたが，局所的な物理量では区別できない量子相が存在することが明らかになってきた。そのような量子相を「トポロジカル量子相」と呼ぶ[16, 17]。その典型例は，これまでにも議論した量子ホール状態であり，トポロジカル量子数であるチャーン数によって分類できる。量子ホール状態自体は1980年代から知られていたものであるが，近年では，さまざまな対称性の下でのトポロジカル絶縁体を含め，多彩なトポロジカル量子相が見いだされている。

また，新規物質の合成も含めた実験研究の進歩も大きい。たとえば，本記事で議論したサウレス・ポンプは，主に一種の思考実験として扱われてきた。しかし，近年の冷却原子系の実験技術の進歩により，サウレス・ポンプを理論的概念に忠実な形で実験的に実現し，輸送電荷の量子化を観

測することも可能になった[18]。これに限らず，思考実験としてのみ可能だった多くの現象を実験的に実現し観測することが可能になってきている。これらの実験的な進歩は，理論にも影響を与えている。

長年の間，トポロジカル現象は，量子ホール効果に代表される低温の量子系に特有のものとして研究されてきた。しかし，理論的な進展を背景に，外部との相互作用のある量子開放系や非平衡系，さらには電気回路や機械系[19]のように完全に(量子力学の効果がないという意味で)古典的な系にもトポロジカルな現象が見いだされるようになってきた。特に，地球規模の現象として，赤道付近の海流も，量子ホール状態の端電流と極めて類似したトポロジカルな機構により安定性が保証されているという理論も提案されている[20]。

このように，現代では極めて多彩な物理現象がトポロジーにもとづいて理解されているが，その重要な起源は，量子ホール効果とそれをトポロジカル量子数(チャーン数)に結びつけたTKNN論文である。近年のトポロジカル現象の研究の隆盛を考えると，2016年のノーベル物理学賞が「トポロジカル相転移と，物質のトポロジカル相の理論的発見」の先駆的な成果に対して授与された[21,22]のは自然な流れであろう。TKNN論文も，さらに遡れば1931年のディラックによるモノポールの理論や，AB効果などにも源流を求めることもできる。物理学における概念が時間をかけて浸透し，発展していくことの良い例としてあげることもできるだろう。

文献

1—戸田盛和: ベクトル解析(理工系の数学入門コース 新装版)，岩波書店(2019)

2—W. Ehrenberg & R. E. Siday: Proc. Phys. Soc. B, **62**(1), 8(1949)

3—Y. Aharonov & D. Bohm: Phys. Rev., **115**, 485(1959)

4—ファインマン，レイトン，サンズ著，宮島龍興訳: ファインマン物理学 III 電磁気学，岩波書店(1986)

5—外村彰: 量子力学を見る——電子線ホログラフィーの挑戦(岩波科学ライブラリー)，岩波書店(1995)

6—L. O'Raifeartaigh: *The Dawning of Gauge Theory*, Princeton University Press(1997)

7—P. A. M. Dirac: Proc. R. Soc. Lond. A, **133**, 60(1931)

8—小林昭七: 接続の微分幾何とゲージ理論，裳華房(1989)

9—吉岡大二郎: 量子ホール効果(新物理学叢書)，岩波書店(初版：1998，岩波オンデマンドブックス：2016)

10—R. B. Laughlin: Phys. Rev. B, **23**, 5632(1981)

11—D. J. Thouless et al.: Phys. Rev. Lett., **49**, 405(1982)

12—M. Kohmoto: Annals of Physics, **160**, 343(1985)

13—D. J. Thouless: Phys. Rev. B, **27**, 6083(1983)

14—Q. Niu & D. J. Thouless: Journal of Physics A: Math. Gen., **17**, 2453(1984)

15—H. Watanabe & M. Oshikawa: Phys. Rev. X, **8**, 021065(2018)

16—R. Moessner & J. E. Moore: Topological Phases of Matter, Cambridge University Press(2021)

17—押川正毅: 数理科学，**528**, 56(2007)

18—S. Nakajima et al.: Nature Physics, **12**, 296(2016)

19—S. D. Huber: Nature Physics, **12**, 621(2016)

20—P. Delplace et al.: Science, **358**, 1075(2017)

21—Advanced information. NobelPrize.org. Nobel Prize Outreach AB 2022. Thu. 7 Jul 2022. https://www.nobelprize.org/prizes/physics/2016/advanced-information/

22—押川正毅: 物性研だより，**56**(3), 1(2016)https://www.issp.u-tokyo.ac.jp/maincontents/docs/tayori56-3_Part3.pdf